Математический конкурс «Золотой Ключик»

Решение задания для 4-5 классов

Блок 1

1. В классе в течение недели 20 учеников получили хотя бы одну «пятёрку», 15 учеников получили не менее двух «пятёрок», 13 учеников получили не менее трёх «пятёрок», 8 учеников получили не менее четырёх «пятёрок» и 3 ученика получили не менее пяти «пятёрок». Сколько всего «пятёрок» получили ученики класса в течение недели?

А. 59.	**Б.** Более 59.	**В.** Не менее 59.	**Г.** Определить нельзя.

□ Одну «пятёрку» получили 20 – 15 = 5 учеников. Две «пятёрки» получили 15 – 13 = 2 ученика. Три «пятёрки» получили 13 – 8 = 5 учеников. Четыре «пятёрки» получили 8 – 3 = 5 учеников. Пять и больше «пятёрок» получили 3 ученика Следовательно, количество «пятёрок», полученных учениками класса в течение недели, не менее $5 + 2·2 + 3·5 + 4·5 + 5·3 = 59$.

Ответ. В. Не менее 59.

2. По окончании хоккейного турнира две команды-победительницы набрали одинаковое количество очков. Для установления одного победителя было решено, чтобы эти команды провели между собой несколько игр до тех пор, пока одна из команд не одержит 4 победы. Ничьих в этих играх нет. Какое наибольшее количество игр может оказаться необходимым для определения победителя?

А. 6.	**Б.** 7.	**В.** 8.	**Г.** 9.

□ Для установления победителя может понадобиться или 4 игры (если все игры выиграет одна из команд), или 5 игр (одна из команд выиграет 4 игры, а вторая одну), или 6 игр (одна из команд выиграет 4 игры, а вторая две), или 7 игр (одна из команд выиграет 4 игры, а вторая три). Наибольшее количество равно 7.

Ответ. Б. 7.

3. Группа школьников должна подняться с 1-го этажа на 20-й. В лифт могут войти не более 5 человек. Масса каждого школьника меньше 60 кг, но больше 50 кг. Какому из приведенных значений массы может равняться сумма масс всех школьников, если лифт поднял их за 6 раз, а за 5 раз не мог этого сделать?

А. 2 т.	**Б.** 1 т 800 кг.	**В.** 1 т 700 кг.	**Г.** 1 т 200 кг.

□ Из условия следует, что школьников не менее 26, но не более 30. Следовательно, масса всех школьников более 50·26 = 1 т 300 кг, но менее 60·30 = 1 т 800 кг. Поэтому сумма масс всех школьников может равняться 1 т 500 кг.

Ответ. В. 1 т 700 кг.

4. Часы на рис. 1 идут правильно, а на рис. 2 спешат на 5 с за 1 час. Сколько часов прошло с того момента, когда часы на рис. 2 показывали правильное время?

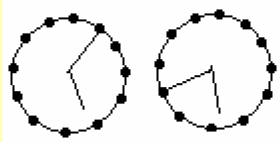


Рис. 1 Рис. 2

А. 240 ч.	**Б.** 360 ч.	**В.** 420 ч.	**Г.** 840 ч.

□ Разница между показаниями часов составляет 35 мин. Часы на рис. 2 спешат на 5·24 = 120 с = 2 мин в сутки. Следовательно, прошло 35:2 = 17 суток 12 ч или 24·17 + 12 = 420 ч с того момента, когда они показывали правильное время.

Ответ. Г. 420 ч.

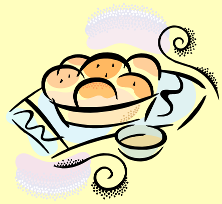
5. На занятие кружка по математике пришло несколько учеников. Во время занятия каждый из них решил 2 задачи из предложенных 5. Известно, что для любых двух кружковцев есть задача, которую один из них решил, а другой нет. Какое наибольшее количество учащихся могло придти на занятие?

А. 8.	**Б.** 10.	**В.** 11.	**Г.** 12.

□ Так как каждый ученик решил 2 задачи и для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет, то задача сводится к нахождению количества различных наборов по 2 задачи из предложенных 5. Это количество равно $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Этот результат можно получить следующими рассуждениями. В качестве первой задачи можно взять любую из 5, для любой выбранной первой задачи есть 4 возможности для выбора второй, при этом любые две задачи окажутся выбранными столько раз, сколькими способами их можно переставить, то есть 2 раза. Число 10 и равно искомому количеству учащихся. Для 11 учащихся требования задачи не выполняются (11 > 10).

Ответ. Б. 10.

6. На дне рождения у Саши каждый мальчик (и Саша тоже!) съел по 4 пирожных и по 3 кекса, а каждая девочка – по одному пирожному и 2 кекса. Оказалось, что количество съеденных детьми пирожных равно количеству съеденных ими кексов. Кого из гостей было больше на дне рождения у Саши, мальчиков или девочек, и на сколько?



А. Мальчиков, на 1.	**Б.** Девочек, на 1.	**В.** Девочек, на 2.	**Г.** Поровну.

Так как каждый мальчик съедал на 1 пирожное больше, чем кексов, а каждая девочка наоборот — на 1 кекс больше, чем пирожных, и количество съеденных детьми пирожных равно количеству съеденных ими кексов, то мальчиков и девочек на дне рождения было одинаковое количество. Так как именинник — мальчик, то из гостей девочек было больше на 1.

Ответ. Б. Девочек, на 1.

7. Подходя к школе, Петя и Вася поспорили, сколько метров осталось до входа в школу. Петя сказал, что больше 25 м, а Вася утверждал, что больше 20 м. Потом выяснилось, что ровно один из них ошибся. Какой из приведенных ответов соответствует действительности?

А. Не больше 25 м.	**Б.** Больше 25 м.	**В.** Не больше 20 м.	**Г.** Определить невозможно.

Петя не может быть правым: если расстояние до школы больше 25 м, то оно и больше 20 м, то есть в этом случае оба правы. Но ведь один из них ошибся. Следовательно, прав Вася: расстояние до школы больше 20 м, но не больше 25 м.

Ответ. А. Не больше 25 м.

8. В кинозале при любом размещении 80 зрителей найдётся ряд, в котором сидит не менее трёх зрителей, а при любом размещении 69 зрителей, по крайней мере, в 5 рядах будет не более одного зрителя. Сколько рядов в кинозале?

А. 37 рядов.	**Б.** 38 рядов.	**В.** 39 рядов.	**Г.** 40 рядов.

Если бы рядов было более 39, то можно было бы рассадить 80 зрителей так, чтобы не нашлось ряда, в котором не менее трёх зрителей (достаточно в каждый из 40 рядов посадить по 2 зрителя, а остальные оставить пустыми).

Если бы рядов было 38, то, посадив по 2 зрителя на 34 ряда, получим не более 4 рядов, в которых не более одного зрителя (в одном ряду 1 зритель и не более 3 рядов — пустые).

Если рядов меньше 38, то рядов, в которых не более одного зрителя, ещё меньше при любом их размещении.

Если рядов 39, то условие задачи выполняется. Пусть зрителей 80.Посадим на каждый ряд 2 зрителя. Всего 78 зрителей. Посадив в какой-то ряд еще 2-х зрителей, получим, по крайней мере, 1 ряд, в котором сидит не менее трех зрителей При рассадке 69 зрителей наибольшее количество рядов, в которых не более одного зрителя, будет в случае, когда в каждом ряду не более 2 зрителей. Оно равно 5: 39 – 34 = 5.

Ответ. В. 39 рядов.

9. В чемпионате по футболу 32 команды разделены на 8 групп по 4 команды в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал, затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Сколько всего матчей в чемпионате сыграли команда, занявшая третье место?

А. 6.	**Б.** 7.	**В.** 8.	**Г.** 12.

☐ В группе каждая команда провела 3 матча. Команда, занявшая третье место, играла в одной восьмой финала, в четвертьфинале, в полуфинале и в матче за третье место. Всего в 7 матчах.

Ответ. Б. 7.

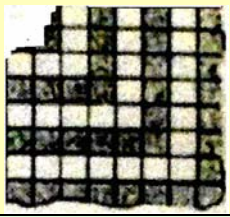
10. На новогодней распродаже марок в филателистическом магазине любая почтовая марка стоила 1 зед (зед — условная денежная единица). При этом к каждым десяти купленным маркам одна давалась бесплатно, а за каждую сотню приобретенных марок еще дарили 5 марок. Заплатив все свои деньги за марки в этом магазине, Богдан получил 200 марок. Сколько у него было денег?

А. 195 зедов.	**Б.** 182 зеда.	**В.** 180 зедов.	**Г.** 178 зедов.

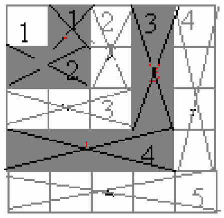
☐ Из условия следует, что у Богдана больше 100 зедов. Поэтому он может купить за 100 зедов 100 марок, получив дополнительно 10 + 5 = 15 марок. Приобретение остальных 200 – 115 = 85 марок потребует 78 зедов, так как за 70 зедов он купит 70 + 7 = 77 марок и 8 марок за 8 зедов. Всего он истратил 178 зедов. Так как он заплатил все свои деньги, то у него было 178 зедов.

Ответ. Г. 178 зедов.

11. Дно детского квадратного бассейна выложено квадратными плитками, как показано на рисунке. Всего использовано 625 плиток. Светлых плиток понадобилось больше. На сколько?



А. На 25.	**Б.** На 20.	**В.** На 15.	**Г.** На 10.

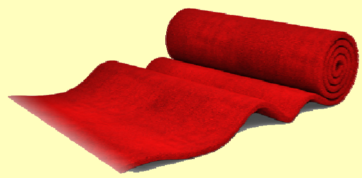


□ Так как 624 = 25·25, то бассейн имеет размеры 25×25 плиток. Так как по условию светлых плиток больше, чем тёмных, а количество плиток в каждом ряду нечётно, то левый дальний угол дна выложен светлой плиткой, все горизонтали и вертикали с нечётными номерами — светлыми плитками, а с чётными — тёмными.

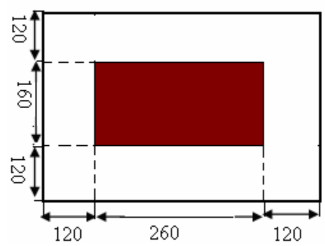
Подсчитаем количество светлых плиток. Оно равно 1 + 2 + 3 + … + 25, а количество тёмных — 1 + 2 + 3 + … + 24 (см. рис.), разность между их количествами равна (1 + 2 + 3 + … + 25) – (1 + 2 + 3 + … + 24) = 25.

Ответ. А. На 25.

12. В комнате на полу лежит ковёр длиной 2 м 60 см и шириной 1 м 60 см так, что его края находятся на одинаковом расстоянии от стен, равном 1 м 20 см. Чему равна площадь комнаты?



А. 10 м^2.	**Б.** 16 м^2.	**В.** 20 м^2.	**Г.** 30 м^2.



□ На рисунке изображён план расположения ковра на полу комнаты. Из него следует, что длина комнаты равна 1 м 20 см + 2 м 60 см + 1 м 20 см = 5 м, а ширина комнаты — 1 м 20 см + 1 м 60 см + 1 м 20 см = 4 м. Следовательно, площадь комнаты равна 5м·4 м = 20 м^2.

Ответ. В. 20 м^2.

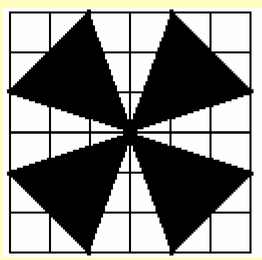
13. Круглый торт, украшенный шоколадными цветочками, тремя прямолинейными разрезами разделили на кусочки так, что на каждом из них оказалось ровно по два цветочка. Какое наибольшее количество цветочков могло быть на торте?

А. 14.	**Б.** 16.	**В.** 19.	**Г.** 21.

□ Двумя прямолинейными разрезами круглый торт можно разделить не более, чем на четыре части. Ещё один разрез может увеличить количество частей не более, чем на три части. Поэтому наибольшее количество кусочков равно 7. Следовательно, наибольшее количество цветочков на торте могло равняться 14.

Ответ. А. 14.

14. Какова площадь «пропеллера», изображённого на рисунке, если площадь одной клетки равна 10 см^2?



А. 300 см^2.	**Б.** 200 см^2.	**В.** 160 см^2.	**Г.** 120 см^2.

□ На рис. 1 площадь незакрашенной части квадрата, состоящей из 9 клеток, равна площади 5 клеток. Следовательно, площадь закрашенной части равна площади 4-х клеток. Поэтому площадь пропеллера равна $10 \cdot 4 \cdot 4 = 160$ см^2.

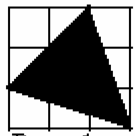
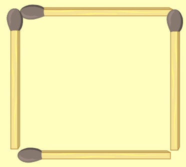


Рис. 1

Ответ. В. 160 см^2.

15. Какое наибольшее количество различных квадратов можно сложить из 180 одинаковых спичек, если одну спичку нельзя использовать для построения двух квадратов и все спички должны быть использованы?



А. 8.	**Б.** 9.	**В.** 10.	**Г.** 11.

□ Из условия следует, что количество спичек, используемых для построения каждого квадрата, кратно 4. Поэтому задача сводится к нахождению наибольшего количества отрезков различной длины, которые можно построить из 180:4 = 45 спичек. Оно равно 9, так как 1 + 2 + … + 9 = 45, а сумма любых 10 различных натуральных чисел больше 55.

Ответ. Б. 9.

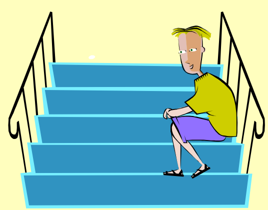
Блок 2

1. На празднике конфет можно было обменять любые три фантика на карамельку в фантике и любые пять фантиков на шоколадную конфету в фантике. Миша принес на этот праздник 50 фантиков. Сможет ли он съесть 5 шоколадных конфет и 15 карамелек?

□ Предположим, что сможет. Для этого нужно иметь $5 \cdot 5 + 3 \cdot 15 = 70$ фантиков. 50 фантиков у Миши есть. На обменённых конфетах ещё 5 + 15 = 20 фантиков. Хотя 50 + 20 = 70, но в это число входит и фантик с последней обмененной конфеты. Получили противоречие.

Ответ. Не сможет.

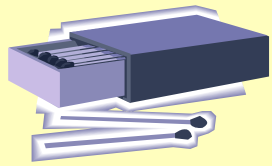
2. В одном 20-этажном доме лифт испорчен так, что на нем можно только либо подняться на 8 этажей вверх, либо опуститься на 11 этажей вниз (если вверх или вниз осталось соответственно меньше этажей, то лифт в этом направлении не движется). Можно ли на этом лифте опуститься с 20-го этажа на: а) третий; б) второй; в) первый?



□ Выполняя допустимые передвижения, получим маршрут, проходящий последовательно через следующие этажи: 20, 9, 17, 6, 14, 3, 11, 19, 8, 16, 5, 13, 2, 10, 18, 7, 15, 4, 12, 1.

Ответ. Можно.

3. Какой объём древесины использован для изготовления 100 упаковок по 10 коробков спичек в каждой, если каждая коробка содержит по 38 спичек, имеющих длину 5 см, ширину 2 мм и высоту 2 мм? Треть использованной древесины составляют отходы.



□ Объём древесины в одной спичке равен $50\cdot2\cdot2 = 200$ мм^3.

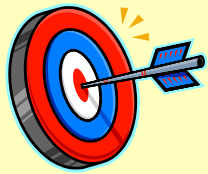
Количество спичек в 100 упаковках равно $38\cdot10\cdot100 = 38\,000$.

Объём древесины в 38 000 спичек равен $200\cdot38\,000 = 7\,600\,000$ мм^3.

Это составляет две третьих всей использованной древесины. Одна треть использованной древесины составляет $7\,600\,000:2 = 3\,800\,000$ мм^3. Всего использовано $3\,800\,000\cdot3 = 11\,400\,000$ мм^3 $= 11\,400$ см^3.

Ответ. 11 400 см^3.

4. Три стрелка Пётр, Евгений и Семён сделали по шесть выстрелов в одну и ту же мишень и выбили по одинаковому количеству очков. Известно, что Пётр за первые три выстрела выбил 43 очка, а Евгений первым выстрелом выбил 3 очка. Известно, что в 50 очков было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три.



1) Кто выбил 50 очков?

2) Кому удалось выбить 25 очков?

3) Кто наибольшее количество раз выбил 10 очков?

□ Всего сделано 18 выстрелов и выбито 213 очков. Каждый выбил по 71 очку, все выстрелы были результативными.

1) Так как Евгений первым выстрелом выбил 3 очка, то за оставшиеся 5 выстрелов он выбил 68 очков. Подбором находим, что $68 = 50 + 10 + 5 + 2 + 1$. Других комбинаций за 5 выстрелов нет. Итак, Евгений выбил 50 очков, его результат: $3 + 50 + 10 + 5 + 2 + 1 = 71$.

2) Так как Пётр за первые три выстрела выбил 43 очка, то есть в каком-то порядке выбил 20, 20 очков и 3 очка (других комбинаций за 3 выстрела не существует), то за оставшиеся $6 – 3 = 3$ выстрела он выбил $71 – 43 = 28$ очков, для которых имеется единственная комбинация попаданий: $25 + 2 + 1$. Итак, с точностью до порядка, результаты Петра следующие: $20 + 20 + 3 + 25 + 2 + 1 = 71$. Оставшиеся попадания принадлежат Семёну. Результаты Семёна: $25 + 20 + 10 + 10 + 5 + 1 = 71$. Таким образом, Петру и Семёну удалось выбить по 25 очков.

3) Анализируя результаты трёх стрелков, приходим к выводу, что Семён наибольшее количество раз выбил 10 очков

Ответ. 1) Евгений; 2) Петру и Семёну; 3) Семён.

5. В последнее время Вася много ходит на лыжах. Правда, вчера он прошёл на 3 км меньше, чем позавчера, и на 40 км меньше, чем позавчера и сегодня вместе. Сколько километров он прошёл на лыжах сегодня?

□ Из условия вытекает, что сегодня пройдено 40 – 3 = 37 км. Действительно, разность между расстояниями, пройденными позавчера и вчера, равна 3 км, а разность между суммой расстояний, пройденных позавчера и сегодня, и расстоянием, пройденным вчера, равна 40 км. В этих действиях вычитаемые равны, поэтому разность результатов равна разности уменьшаемых.

Ответ. 37 км.

6. В некотором селении живёт 300 семей. Треть семей имеет и кошку, и собаку, треть — или кошку, или собаку, а у трети нет ни кошки, ни собаки. Сколько указанных домашних животных в селении?

□ Если каждая семья из трети семей, имеющих и кошку, и собаку, передаст по одному своему животному в семьи, не имеющих ни кошки, ни собаки, то в каждой семье селения будет или по одной кошке, или по одной собаке. Следовательно, в селении 300 указанных домашних животных.

Ответ. 300.

7. В некоторой фирме имеется директор фирмы, его заместитель, начальники трёх отделов, их заместители и рядовые сотрудники отделов. Известно, что тех, у кого есть начальник, в 5 раз больше, чем начальников. Сколько в фирме рядовых сотрудников, если рядовые сотрудники подчиняются директору, его заместителям, начальникам всех отделов и их заместителям?

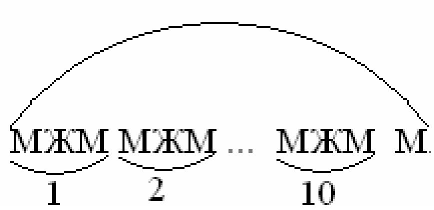
□ Количество начальников, то есть тех, кому кто-то подчиняется, равно 8. Тогда количество людей, им подчиняющихся, равно $8 \cdot 5 = 40$. Это количество состоит из семи руководителей (всех начальников, кроме директора фирмы) и рядовых сотрудников. Следовательно, количество рядовых сотрудников равно 40 – 7 = 33.

Ответ. 33.

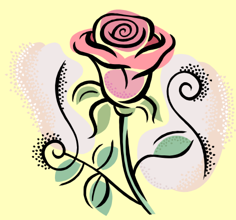
8. За круглым столом сидит 31 участник дискуссии. Женщины не сидят рядом. У каждого мужчины, по крайней мере, один сосед — мужчина. Какое наибольшее количество женщин могло быть за круглым столом?

□ Так как соседями каждой женщины являются мужчины, то женщин не более 11. Однако, так как у каждого мужчины, по крайней мере, один сосед — мужчина, то женщин ровно 10 (см. рис.).

Ответ. 10.



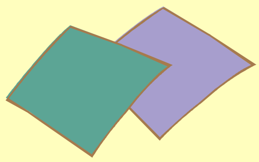
9. Квадратная клумба в парке засажена розами. Расстояние между кустами в ряду равно 80 см, а между рядами — 1 м 20 см. Сколько кустов роз на клумбе, если в каждом ряду 18 кустов?



□ Длина стороны клумбы не менее 80·17 = 1360 см. Так как число 1360 при делении на 120 (120 см — расстояние между рядами) даёт в неполном частном число 11 и в остатке 40, то в клумбе не более 12 рядов. Следовательно, на участке не более 18·12 = 216 кустов роз.

Ответ. Не более 216 кустов.

10. Какое наибольшее количество квадратов различных размеров можно получить из квадратиков одинаковых размеров, используя их все, если их количество равно: 1) 59; 2) 145?



□ В качестве единицы измерения длин примем длину стороны квадратика. Тогда длины сторон составляемых квадратов будут выражаться натуральными числами.

1) Если из данных квадратиков сложить квадраты различных размеров, то сумма квадратов длин их сторон должна равняться 59. Следовательно, нужно найти наибольшее количество различных натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 59. Нетрудно заметить, что $1^2 + 3^2 + 7^2 = 59$. Следовательно, три квадрата различных размеров можно сложить. А четыре нельзя. Очевидно, что длины сторон составляемых квадратов не превосходят 7. Поэтому задача сводится к возможности представления числа 59 в виде суммы четырёх слагаемых, которые могут равняться числам 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. Перебором убеждаемся, что такое представление невозможно.

2) Аналогично рассуждая, получим, что из 145 квадратиков одинаковых размеров можно составить 5 квадратов различных размеров, так как 145 = 64 + 36 + 25 + 16 + 4. Хотя 145 = 81 + 25 + 25 + 9 + 4 + 1, но в этом представлении не все слагаемые различны.

Число 145 нельзя представить в виде суммы более 5 различных квадратов натуральных чисел. Если в качестве наибольшего слагаемого взять числа 144, 121, 100. 81, то суммы оставшихся слагаемых 145 – 144 = 1, 145 – 121 = 24, 145 – 100 = 45, 145 – 81 = 64 нельзя представить в виде суммы более 4 различных квадратов натуральных чисел. Для 1 и 24 это очевидно. Так как $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$, то это справедливо и для 45. Перебором легко приходим к выводу, что это верно и для числа 64.

Ответ. 1) 3; 2) 5.