Математический конкурс «Золотой Ключик»

Решение задания для 6-7 классов

Блок 1

1. В классе 91% учащихся имеет мобильные телефоны, 72% имеют ноутбуки и 43% имеют планшеты. Какой процент учащихся класса заведомо имеет и мобильный телефон, и ноутбук, и планшет?

А. 6%.	**Б.** 7%.	**В.** 8%.	**Г.** 9%.

Так как 9% учащихся не имеют мобильных телефонов, 28% не имеют ноутбуков и 57% не имеют планшетов, то не более 9 + 28 + 57 = 94% учащихся не имеют хотя бы одно из указанных средств связи. Следовательно, 100 – 94 = 6% учащихся класса заведомо имеют их все.

Ответ. А. 6%.

2. Вчера проверяли настенные часы и будильник и поставили их стрелки правильно. Настенные часы отстают на 2 мин в час. Будильник спешит за час на 1 мин. Когда сегодня утром глянули на часы, то настенные часы показывали 7 ч, а будильник — 8 ч. В котором часу вчера проверяли часы?

А. В 23 ч 40 мин.	**Б.** В 7 ч 40 мин.	**В.** В 13 ч 58 мин.	**Г.** В 11 ч 40 мин.

За 1 час разница показаний часов увеличивается на 3 мин. Следовательно, прошло 20 ч с момента проверки часов. За 20 ч будильник ушёл вперёд на 20 мин. Следовательно, показания часов сравнивались сегодня в 7 ч 40 мин, а часы устанавливались вчера в 11 ч 40 мин.

Ответ. Г. В 11 ч 40 мин.

3. На утреннике всем детям поровну раздали 120 конфет. Если бы Петя и Таня не заболели и пришли на утренник, то каждый ребёнок получил бы на 2 конфеты меньше. Сколько детей пришло на утренник?

А. 3.	**Б.** 8.	**В.** 10.	**Г.** 12.

Так как $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, то делителями числа 120 являются числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 60, 120. Количество детей на утреннике может равняться только этим числам. Пары (3; 5), (4; 6), (6; 8), (8; 10), (10; 12), где первое число означает количество детей, пришедших на утренник, а второе — количество детей, которые должны были придти на утренник, удовлетворяют первому требованию — отличаются на 2. Но второе требование выполняется только для пары (10; 12).

Действительно, (120:10) – (120: 12) = 2, а (120:3) – (120: 5) ≠ 2, (120:4) – (120:6) ≠ 2, (120:6) – (120:8) ≠ 2, (120:8) – (120: 10) ≠ 2.

Ответ. В. 10.

4. Три машины выехали одновременно из одного пункта и прибыли в другой пункт одна за другой через равные промежутки времени. Скорость первой из них 80 км/ч, последней — 48 км/ч. Какова скорость машины, пришедшей второй?

А. 66 км/ч.	**Б.** 64 км/ч.	**В.** 60 км/ч.	**Г.** 56 км/ч.

□ Обозначим расстояние от старта до финиша через S км. а скорость машины, пришедшей второй, через v км/ч. Тогда $\frac{S}{80}, \frac{S}{v}, \frac{S}{48}$ — время движения, соответственно, первой, второй и третьей машин. Из условия следует равенство

$\frac{S}{v} - \frac{S}{80} = \frac{S}{48} - \frac{S}{v}$ или $\frac{2}{v} = \frac{1}{80} + \frac{1}{48} = \frac{1}{30}$. Следовательно, v = 60 км/ч.

Ответ. В. 60 км/ч.

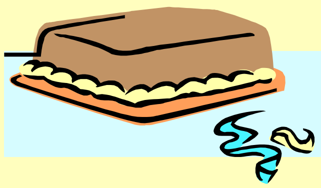
5. Средний возраст учащихся класса некоторой школы составляет 11,625 года, а средний рост — $118\frac{1}{3}$ см. Какому из приведенных в ответах чисел может равняться количество учащихся в классе, если возраст каждого ученика определяется с точностью до года, а рост — с точностью до 1 см?

А. 16.	**Б.** 24.	**В.** 32.	**Г.** 42.

□ Средний возраст учащихся класса равен $11{,}625 = 11\frac{5}{8}$ года. Так как возраст каждого ученика определяется с точностью до года, то количество учащихся кратно 8. Поскольку рост каждого ученика определяется с точностью до 1 см, то количество учащихся кратно 3. Поэтому оно кратно и 3, и 8, то есть кратно 24.

Ответ. Б. 24.

6. На какое наименьшее количество кусочков, не обязательно равных, нужно разрезать торт, чтобы его можно было разделить поровну и между тремя, и между пятью сладкоежками, не разрезая их на меньшие кусочки?



А. На 6.	**Б.** На 7.	**В.** На 11.	**Г.** На 15.

□ Разделим торт сначала в отношении 2:3. Большую часть разрежем на три равные части. Меньшую часть также сначала разрежем на три равные части, а потом одну из них разрежем пополам. Получим всего 7 частей, массы которых составляют $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}$ части массы всего торта. Из них можно составить и три $\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{5}, \frac{2}{15}+\frac{1}{5}, \frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)$, и пять $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}+\frac{1}{15}, \frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)$ равных частей.

Деление на шесть частей не может обеспечить выполнение требований задания. Если обозначить массы этих частей через m_1, …, m_6, то очевидно, что должны выполняться равенства $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 + m_6$ (может бать, после изменения нумерации) для разделения между пятью сладкоежками. Для разделения между тремя необходимо, чтобы суммы трёх пар частей были равными. Следовательно, должны бать верными равенства $m_6 + m_1 = m_5 + m_2 = m_3 + m_4$ (тоже, возможно, после изменения нумерации этих частей). Из этих равенств следует, что $m_3 = m_5$. Но $m_3 = m_5 + m_6$. Полученное противоречие свидетельствует о невозможности разрезания торта на 6 частей, удовлетворяющих требованиям задачи.

Ответ. Б. На 7.

7. В чемпионате по футболу 32 команды разделены на 8 групп по 4 команды в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал, затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Сколько всего матчей было сыграно в чемпионате?

А. 48.	**Б.** 64.	**В.** 96.	**Г.** 128.

□ В каждой группе проведено по 6 матчей. Всего в группах проведено 48 матчей. 8 матчей проведено в $\frac{1}{8}$ финала, 4 матча — в $\frac{1}{4}$ финала, 2 матча — в $\frac{1}{2}$ финала, финальный матч и матч за третье место. Всего $48 + 8 + 4 + 2 + 2 = 64$ матча.

Ответ. Б. 64.

8. Саша обратил внимание на номер машины, подъехавшей к его дому: СТО 85-87. Интересно, если к первому числу прибавить цифры второго, то получится 100, и если ко второму числу прибавить цифры первого, то тоже получится 100. Сколько всего таких номеров?

А. 7.	**Б.** 8.	**В.** 9.	**Г.** 10.

□ Так как сумма цифр двузначного числа меньше 19, то оба числа в номере должны в качестве цифры десятков иметь цифру 8 или цифру 9. В противном случае сумма двузначного числа и суммы цифр другого двузначного числа не может равняться 100. Это такие номера:

СТО 83- 89, СТО 84- 88, СТО 85- 87, СТО 86- 86, СТО 87- 85, СТО 88- 84, СТО 89- 83, СТО 90-91, СТО 91-90. Всего 9 номеров.

Ответ. В. 9.

9. Организаторы математической олимпиады составляют варианты заданий для 4, 5, 6, 7, 8 и 9 классов. В каждом варианте должно быть семь задач, ровно четыре из которых не встречаются ни в одном из других вариантов. Какое максимальное количество заданий можно включить в составляемые варианты?

А. 24.	**Б.** 33.	**В.** 36.	**Г.** 40.

□ Во всех вариантах есть $4\cdot6 = 24$ задачи, встречающиеся только в одном из вариантов. Остальные задачи могут встречаться, по крайней мере, в двух вариантах. Так как вариантов 6, то из них можно образовать 3 пары, например 5 и 6 классы, 7 и 8, 9 и 10. В каждой паре самое большее есть $7 - 4 = 3$ совпадающие задачи, то есть количество задач, встречающихся хотя бы в двух вариантах не более $3\cdot3 = 9$. При любом другом распределении общих задач их количество не будет превосходить 9. Таким образом, максимальное количество задач может равняться $24 + 9 = 33$.

Ответ. Б.33.

10. За круглым столом расположились 30 взрослых участников дискуссии так, что правым соседом каждой женщины был мужчина, а у половины мужчин справа сидела женщина. Сколько женщин сидело за круглым столом?

А. 10.	**Б.** 11.	**В.** 20.	**Г.** Определить однозначно невозможно.

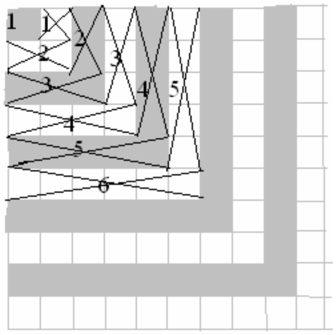
□ Очевидно, что если женщин 10, а мужчин 20, то их можно расположить так, как указано в условии: ж м м ж м м … ж м м. Требуется доказать, что это единственное решение.

Так как левым соседом каждой женщины не может быть женщина (правый сосед каждой женщины — мужчина), то количество женщин не больше половины количества мужчин. А так как у половины мужчин справа сидела женщина, то количество женщин не меньше половины количества мужчин. Следовательно, количество женщин равно половине количества мужчин, то есть составляет треть количества участников дискуссии и равно 10.

Ответ. А. 10.

11. Дно квадратного бассейна выложено квадратными плитками, как показано на рисунке. Всего использовано 10 000 плиток. Светлых плиток понадобилось больше. На сколько?

А. На 100.	**Б.** На 80.	**В.** На 60.	**Г.** На 40.



□ Так как 10 000 = 100·100, то бассейн имеет размеры 100×100 плиток. Так как по условию светлых плиток больше, чем тёмных, а количество плиток в каждом ряду чётно, то левый дальний угол дна выложен тёмной плиткой, все горизонтали и вертикали с чётными номерами — светлыми плитками, а с нечётными — тёмными.

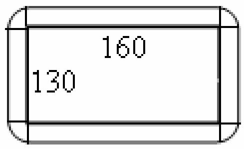
Подсчитаем количество светлых плиток. Оно равно $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$, а количество тёмных — $1 + 2 + 3 + \ldots + 99$ (см. рис.), разность между их количествами равна $(1 + 2 + 3 + \ldots + 100) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 99) = 100$.

Ответ. А. На 100.

12. Парк окружён прямоугольной оградой со смежными сторонами 160 м и 130 м. Снаружи парка, на одинаковом расстоянии от ограды, пролегает тропинка. Каждое утро спортсмен пробегает по тропинке вокруг парка 10 раз. На каком примерно расстоянии от ограды расположена тропинка для бега, если спортсмен пробегает примерно 6 км? Выберите наиболее точное значение.

А. 0,5 м.	**Б.** 1 м.	**В.** 2 м.	**Г.** 3 м.

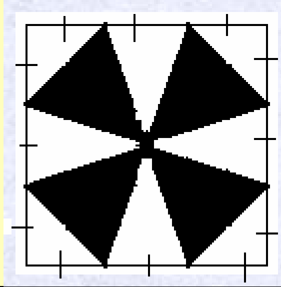
□ На рисунке изображена тропинка вокруг парка. Её длина равна сумме периметра ограды парка и длины окружности неизвестного радиуса r м. Следовательно, спортсмен каждое утро пробегает расстояние равное $10(2(130 + 160) + 2\pi r)$, что по условию примерно равно 6000 м.



Имеем уравнение $10(2(130 + 160) + 2\pi r) = 6000$ или $580 + 2\pi r = 600$, или $\pi r = 10$, отсюда $r = \dfrac{10}{\pi} \approx 3$ м.

Ответ. Г. 3 м.

13. Какую часть площади квадрата занимает фигура, закрашенная на рисунке?



А. $\frac{2}{3}$.	**Б.** $\frac{5}{9}$.	**В.** $\frac{4}{9}$.	**Г.** $\frac{1}{3}$.

□ Разобьём квадрат на 36 равных квадратиков. Нетрудно убедиться, что площадь закрашенной фигуры равна площади 16 квадратиков (см. рис. 1). Следовательно, закрашенная фигура покрывает $\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$ площади квадрата.

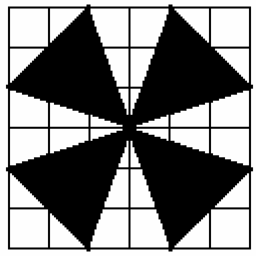
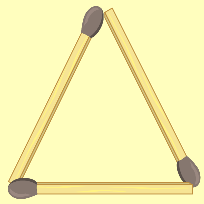


Рис. 1

Ответ. В. $\frac{4}{9}$.

14. Какое наибольшее количество не равных правильных треугольников можно сложить из 180 спичек, если одну спичку нельзя использовать для построения двух треугольников и все спички должны быть использованы?



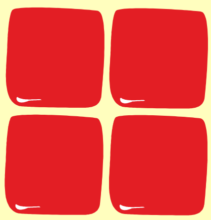
А. 8.	**Б.** 9.	**В.** 10.	**Г.** 11.

□ Из условия следует, что количество спичек, используемых для построения каждого треугольника, кратно 3. Поэтому задача сводится к нахождению наибольшего количества отрезков различной длины, которые можно построить из 180:3 = 60 спичек. Оно равно 10, так как, например, 1 + 2 + … + 9 + 15 = 60.

Более 10 треугольников построить нельзя, так как, если треугольников, например, 11 и a_1, a_2, …, a_{11} — длины их сторон, причём $a_1<a_2<\ldots<a_{11}$, то $a_1+a_2+\ldots+a_{11}\le 60$, но $a_1+a_2+\ldots+a_{11}\ge 1+2+\ldots+11=66$. Получили противоречие.

Ответ. В. 10.

15. Участок пола, имеющий форму круга диаметром 1 м, нужно покрыть квадратными плитками размера 25 см × 25 см. Какое наименьшее количество плиток потребуется для этого, если обрезки плиток не используются?



А. 8.	**Б.** 12.	**В.** 16.	**Г.** 20.

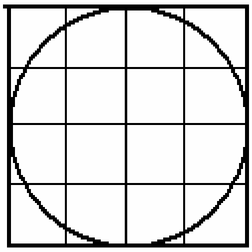


Рис. 1

□ Выберем в качестве единицы масштаба длину стороны плитки. Задача сводится к покрытию круга диаметром 4 единицы длины наименьшим количеством единичных квадратиков. На рис. 1 указано такое покрытие (сторона клетки равна единице длины). Таких квадратиков 16.

Если центр круга лежит внутри квадратика, то количество квадратиков, покрывающих круг, не меньше указанного. Это следует из того, что при сдвиге центра круга на рис. 1 по горизонтали или по вертикали количество квадратиков, имеющих с ним общую часть, не уменьшится.

Ответ. В. 16.

Блок 2

1. В одной банке 100 мл воды, другая — пустая. Половину воды перелили из первой банки во вторую. Затем из второй банки перелили половину воды в первую и т. д. На каждое переливание затрачивают 1 минуту. Через сколько минут количество воды во второй банке впервые будет отличаться от удвоенного количества воды в первой банке не более, чем на 1 см^3?

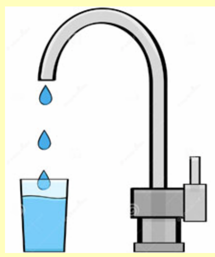
□ В следующей таблице представлены данные о наличии воды в обеих банках после каждого переливания.

№ перелив.	0	1	2	3	4	5	6	7
1 банка, мл	100	50	75	37,5	68,75	34,375	67,1875	33,59375
2 банка, мл	0	50	25	62,5	31,25	65,625	32,8125	66,40625

После 7-го переливания модуль разности между количеством воды во второй банке и удвоенным количеством воды в первой банке равен $|66{,}40625 - 33{,}59375 \cdot 2| = 0{,}78125$ см^3, что меньше 1 см^3. В то же время эта величина после 5-го переливания равна $|65{,}625 - 34{,}375 \cdot 2| = 3{,}125$ см^3, что превышает 1 см^3.

Ответ. Через 7 минут.

2. В понедельник утром в бак закачали 1000 л воды. Какое наибольшее количество литров воды можно расходовать ежедневно, чтобы, доливая каждый вечер половину того количества воды, которое было утром, её хватило на четверг?



□ Обозначим ежедневный расход воды через x л. Составим таблицу наличия, расхода и пополнения бака по дням недели.

	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг
Было утром, л	1000	$1500 - x$	$2250 - \dfrac{5x}{2}$	$3375 - \dfrac{19x}{4}$
Расход, л	x	x	X	X
Остаток, л	$1000 - x$	$1500 - 2x$	$2250 - \dfrac{7x}{2}$	$3375 - \dfrac{23x}{4}$
Пополнение	500	$750 - \dfrac{x}{2}$	$1125 - \dfrac{5x}{4}$	
Стало вечером, л	$1500 - x$	$2250 - \dfrac{5x}{2}$	$3375 - \dfrac{19x}{4}$	

Наибольший возможный ежедневный расход воды будет в том случае, если $3375 - \dfrac{23x}{4} = 0$. Отсюда $x \approx 586$ л. Округление выполнено по недостатку, в противном случае воды может не хватить на четверг.

Ответ. ≈ 586 л.

3. В соревновании, которое состоит из нескольких конкурсов, принимают участие две команды. За победу в одном конкурсе команда получает 5 очков, за поражение — 0 очков, за ничью — 2 очка. Соревнование закончилось со счётом 16:11.

1) Сколько конкурсов выиграл победитель?

2) Сколько было конкурсов?

□ 1) Обозначим через x количество побед победителя, а через y — количество ничьих. Тогда, по условию, $5x + 2y = 16$. Так как $x \neq 0$, то этому уравнению удовлетворяет единственная пара натуральных чисел $x = 2$, $y = 3$. Следовательно, победитель выиграл 2 конкурса, а в трёх конкурсах была ничья.

2) Команда, занявшая второе место, набрала 11 очков, причём, имеет 3 ничьи, за которые она получила 6 очков. Остальные $11 - 6 = 5$ очков она получила за победу в одном конкурсе. Всего было $2 + 1 + 3 = 6$ конкурсов.

Ответ. 1) 2 конкурса; 2) 6 конкурсов.

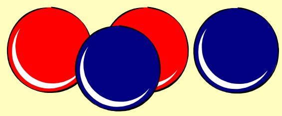
4. В компании 6 учащихся. Среди любых трёх найдётся хотя бы два закадычных друга. Найдётся ли в этой компании тройка закадычных друзей?

□ Обозначим учащихся буквами A, B, C, D, M, N. Если у A есть три закадычных друга в компании, например, B, C, D, то в тройке {B, C, D} есть, по крайней мере, 2 закадычных друга. Тогда вместе с A они образуют искомую тройку.

Если же у A только два друга в компании, например, B и C, то искомую тройку составляют учащиеся D, M, N. Это следует из того, что в тройках {A, M, N}; {A, D, M}; {A, D, N} есть пара друзей, но среди них нет друзей A.

Ответ. Найдётся.

5. В ящике лежат синие и красные шары. Некоторые из шаров имеют радиус 3 см, остальные — 5 см. Есть ли в ящике два шара разных цветов, которые различаются размерами?



□ 1-й способ. Обозначим радиусы шаров числами 3 и 5, а их цвета буквами с и к. Предположим, что в ящике нет двух шаров разных цветов, которые различаются размерами. Тогда в ящике могут быть шары только следующих видов: 3с, 3 к, или 5с, 5к, или 3с, 5с, или 3к, 5к. Все эти случаи противоречат тому, что в ящике шары двух различных цветов и двух различных размеров. Полученное противоречие доказывает, что есть в ящике два шара разных цветов, которые различаются размерами.

□ 2-й способ. Возьмём любой шар радиуса 3 см. Пусть он синий. Если все шары радиуса 5 см синие, то из условия следует, что есть красный шар радиуса 3 см. Итак, в ящике есть два шара разных цветов, различающиеся размером.

Аналогично рассуждаем в случае, когда выбранный шар радиуса 3 см окажется красным.

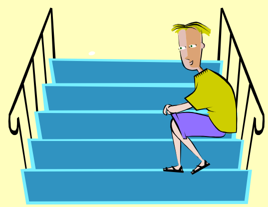
Ответ. Есть.

6. На занятие кружка по математике пришло 11 учеников. Во время занятия каждый из них решил 3 задачи из предложенных. Известно, что для любых двух кружковцев есть задача, которую один из них решил, а другой нет. Сколько задач было предложено?

□ Так как каждый ученик решил 3 задачи и для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет, то задача сводится к нахождению количества различных наборов по 3 задачи из предложенных. Если предложено 5 задач, то это количество равно $\frac{5\cdot4\cdot3}{6}=10$. Этот результат можно получить следующими рассуждениями. В качестве первой задачи можно взять любую из 5, для любой выбранной первой задачи есть 4 возможности для выбора второй, третью задачу можно выбрать из 4 оставшихся, при этом любые три задачи окажутся выбранными столько раз, сколькими способами их можно переставить, то есть 6 раз. Следовательно, при 5 задачах могло быть не более 10 учащихся, а по условию, их 11. Количество различных наборов по 3 задачи из 6 равно $\frac{6\cdot5\cdot4}{6}=20$. Следовательно, для 6 задач и более требования выполняются (20 > 11).

Ответ. Не менее 6 задач.

7. В одном 20-этажном доме лифт испорчен так, что на нем можно только либо подняться на 8 этажей вверх, либо опуститься на 11 этажей вниз (если вверх или вниз осталось соответственно меньше этажей, то лифт в этом направлении не движется). На какие этажи можно добраться на этом лифте с первого этажа?



□ Согласно условию, с первого этажа можно попасть на следующие этажи: 9, 17, 6, 14, 3, 11, 19, 8, 16, 5, 13, 2, 10, 18, 7, 15, 4, 12, 20. Таким образом, на этом лифте с первого этажа можно добраться на любой этаж.

Ответ. На все.

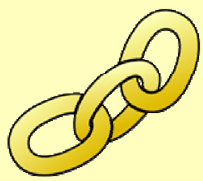
8. Группа школьников весит 510 кг, при этом каждый из них весит не более 60 кг. Какое наименьшее количество вызовов нужно сделать, чтобы поднять всех школьников с 1-го этажа на 10-й этаж, если грузоподъёмность лифта не превышает 200 кг?

□ За один подъём можно гарантированно поднять не менее 141 кг, так как, если масса школьников, находящихся в лифте, не больше 140 кг, то лифт может принять ещё одного ученика. Поэтому за 4 подъёма можно поднять всех школьников,

За три подъёма это можно сделать не всегда. Например, если школьников 10, и масса каждого равна 51 кг, то этого сделать нельзя: за один подъём можно поднять только троих.

Ответ. 4.

9. Цепочка состоит из 30 цельных колечек, каждое из которых соединено с двумя другими и наружный диаметр которых 2,2 мм, а внутренний 2 мм. Может ли эту цепочку одеть на шею человек, обхват головы которого 55 см?



□ Длина растянутой цепочки равна сумме длин 30 отрезков по 1,6 мм и 30 отрезков по 0,4 мм. Эта сумма равна $30 \cdot 1{,}6 + 30 \cdot 0{,}4 = 30 \cdot (1{,}6 + 0{,}4) = 30 \cdot 2 = 60$ мм.

Ответ. Нет.

10. Вдоль дороги расположены посты на различных расстояниях друг от друга. Можно ли, не зная эти расстояния, указать пост, на котором следует провести совещание старших дежурных этих постов, проехав вместе наименьшее расстояние, если постов: 1) пять; 2) шесть?

□ 1) Изобразим расположение постов на рис. 1 точками P_1, …, P_5. Где бы ни проходило совещание, представители постов P_1 и P_5 вместе

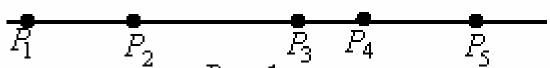


Рис. 1

проедут расстояние, равное расстоянию между этими постами. Представители постов P_2 и P_4 вместе проедут расстояние, не меньшее расстояния между постами P_2 и P_4.

Если совещание пройдёт не на посту P_3, то представитель этого поста проедет отличное от нуля расстояние. Следовательно, если совещание будет проходить на посту P_3, то вместе представители всех пяти постов проедут наименьшее расстояние, равное сумме расстояний от P_1 до P_5 и от P_2 до P_4.

2) Если постов 6 (см. рис. 2), то, рассуждая, как и выше, придём к выводу, что при сборе как на P_3 так и наP_4, представителями всех постов будет преодолено одно и то же наименьшее расстояние.

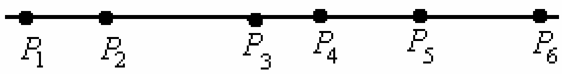


Рис. 2

Ответ. 1) Можно; 2) можно.