Математический конкурс «Золотой Ключик»

Решение задания для 8-9 классов

Блок 1

1. Компьютерный супер-вирус повреждает за 1 секунду половину объёма информации, содержащейся на диске. На диске было 8 Мб информации (1 Мб = 1000000 б). Через какое наименьшее количество секунд заведомо будет повреждён хотя бы частично файл объёмом 1600 б?

А. Через 11 с.	**Б.** Через 12 с.	**В.** Через 13 с.	**Г.** Через 14 с.

□ Через k секунд остаётся нетронутой $\frac{8000000}{2^k}$ б информации. Указанный файл будет заведомо повреждён, если нетронутой окажется количество информации, удовлетворяющее неравенству $\frac{8000000}{2^k} < 1600$ или $2^k > \frac{8000000}{1600} = 5\,000$ (б). Так как $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096 < 5000$, $2^{13} = 8192 > 5000$, то через 13 с файл будет обязательно повреждён.

Ответ. В. Через 13 с.

2. Магазин покупает на оптовом складе партию книг в 500 штук по цене 40 зедов за книгу (зед — условная денежная единица). Увеличение партии на каждые 50 книг приводит к снижению цены одной книги на 2 зеда. Эта скидка сохраняется только в том случае, если общая партия не превосходит 750 книг. Магазин дополнительно заплатил ещё 2100 зедов за книги, купленные сверх 500. На сколько книг увеличилась закупаемая партия?

А. На 50.	**Б.** На 100.	**В.** На 150.	**Г.** На 200.

□ Обозначим через x количество партий по 50 книг, на которые увеличилась закупаемая партия книг. Тогда имеем уравнение: $(500 + 50x)(40 - 2x) = 22\,100$ или $x^2 - 10x + 21 = 0$. Его корни 3 и 7. Корень 7 не удовлетворяет условию задачи, так как в этом случае было бы куплено $500 + 50\cdot 7 = 850$ книг, что превышает ограничение в 750 книг. Следовательно, закупаемая партия увеличилась на $50\cdot 3 = 150$ книг.

Ответ. В. На 150 книг.

3. В летний спортивный лагерь отправляли детей. В каждом автобусе планировалось поместить одинаковое количество детей. К сожалению, к месту отправления не прибыл один заказанный автобус, поэтому в каждом автобусе пришлось разместить дополнительно по 3 ребёнка. К моменту возвращения за детьми в лагерь прибыло на 2 автобуса больше, чем планировали, и теперь в каждом автобусе ехало на 5 детей меньше, чем предполагали сначала. Сколько детей было отправлено в спортлагерь?

А. 540.	**Б.** 720.	**В.** 810.	**Г.** 900.

□ Обозначим через x и y количества заказанных автобусов и количество детей, которых планировали разместить в каждом автобусе. Количество детей, которых отправили в спортлагерь, равно xy.

Это количество также равно $(x - 1)(y + 3)$ или $(x + 2)(y - 5)$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} xy = (x-1)(y+3), \\ xy = (x+2)(y-5) \end{cases}$ или $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 5x - 2y = -10. \end{cases}$ Решим её: $\begin{cases} y = 3x - 3, \\ 5x - 2(3x-3) = -10, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 45, \\ x = 16. \end{cases}$

Следовательно, было заказано 16 автобусов, в каждом планировалось разместить по 45 детей, всего в спортлагерь отправили 45·16 = 720 детей.

Ответ. Б. 720.

4. Два велосипедиста на тренировке движутся равномерно по кольцевой велотрассе в одном направлении. Первый велосипедист проходит трассу на 3 мин быстрее второго и догоняет второго каждые полтора часа. За какое время первый велосипедист проходит трассу?

А. За 18 мин.	**Б.** За 17 мин.	**В.** За 16 мин.	**Г.** За 15 мин.

□ Пусть первый велосипедист проходит трассу за x мин, тогда второй — за $(x + 3)$ мин. Если длину круговой трассы обозначить через l км, то их скорости будут соответственно равны $\frac{l}{x}$ км/мин и $\frac{l}{x+3}$ км/мин. Скорость их сближения равна $\frac{l}{x} - \frac{l}{x+3}$. К тому моменту, когда первый велосипедист догоняет второго, он проходит расстояние, большее, чем второй, на l км. По условию, имеем уравнение: $90\left(\frac{l}{x} - \frac{l}{x+3}\right) = l$ или $x(x + 3) = 3\cdot 90$, или $x^2 + 3x - 270 = 0$. Его корни 15 и –18. Условию задачи удовлетворяет только первый корень. Следовательно, первый велосипедист проходит трассу за 15 мин.

Ответ. Г. За 15 мин.

5. В студенческом шахматном турнире приняли участие два школьника. Они вместе набрали 6,5 очков, а все студенты — по одинаковому количеству очков. Сколько студентов участвовало в турнире? В турнире каждый участник играет с каждым по одному разу, за выигрыш даётся 1 очко, за ничью 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

А. 9.	**Б.** 10.	**В.** 11.	**Г.** 12.

□ Пусть в турнире участвовало x студентов. Тогда в турнире всего приняло участие $(x + 2)$ человека и ими было набрано $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$ очков. Действительно, каждый из $(x + 2)$ шахматистов сыграл $(x + 1)$ партию, любая из которых приносит обоим шахматистам вместе 1 очко. Но при этом мы каждую сыгранную партию учитывали дважды: для каждого из двух соперников. Каждый студент набрал $\left(\frac{(x+2)(x+1)}{2}-6,5\right):x$ или $\frac{x^2+3x-11}{2x}$ очков. Это число будет целым числом или половиной целого числа лишь в том случае, если $x = 11$, так как $\frac{x^2+3x}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ — всегда целое число или половина целого числа.

Ответ. В. 11.

6. В вагоне находится 60 контейнеров трёх видов: контейнеры первого вида массой 0,5 т, второго вида — 0,4 т, третьего вида — 0,3 т. Стоимость одного контейнера каждого вида — соответственно 800, 700 и 600 зедов (зед — условная денежная единица). Общая масса всех контейнеров — 25 т. Какова их общая стоимость?

А. 40 000 зедов.	**Б.** 42 000 зедов.	**В.** 43 000 зедов.	**Г.** 45 000 зедов.

□ Обозначим через x, y, z количества контейнеров соответственно первого, второго и третьего видов. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}0,5x+0,4y+0,3z=25,\\ x+y+z=60\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}5x+4y+3z=250,\\ 3x+3y+3z=180.\end{cases}$$

Отсюда, сложив оба уравнения, получим: $8x + 7y + 6z = 430$, или $800x + 700y + 600z = 43000$.

Ответ. В. 43 000 зедов.

7. На занятие кружка по математике пришло несколько учеников. Во время занятия каждый из них решил 3 задачи из предложенных 6. Известно, что для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет. Какое наибольшее количество учащихся могло придти на занятие?

А. 18.	**Б.** 20.	**В.** 21.	**Г.** 24.

 Так как каждый ученик решил 3 задачи и для любых двух кружковцев есть хотя бы одна задача, которую один из них решил, а другой нет, то задача сводится к нахождению количества различных наборов по 3 задачи из предложенных 6. Оно равно $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=20$. Этот результат можно получить следующими рассуждениями. В качестве первой задачи можно взять любую из 6, для любой выбранной первой задачи есть 5 возможностей для выбора второй; третью задачу можно выбрать из 4 оставшихся, при этом любые три задачи окажутся выбранными столько раз, сколькими способами их можно переставить, то есть 6 раз. Число 20 и есть искомое количество учащихся. Для 21 учащегося требования задачи не выполняются, так как наборы решённых задач хотя бы у двух из них будут совпадать.

Ответ. Б. 20.

8. В чемпионате по футболу команды-участницы разделены на несколько групп по одинаковому количеству команд в каждой группе. В каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу. По две команды-победительницы из каждой группы выходят в одну восьмую финала. Команды, победившие в каждом из восьми матчей одной восьмой финала, выходят в четвертьфинал, затем победители играют в двух полуфинальных матчах и, наконец, финал, определяющий чемпиона. Команды, проигравшие в полуфинальных матчах, играют между собой за третье место. Всего было сыграно 96 матчей в чемпионате. Сколько всего команд участвовало в чемпионате?

А. 32.	**Б.** 40.	**В.** 48.	**Г. 80**.

 В $\frac{1}{8}$ финала проведено 8 матчей, 4 матча — в $\frac{1}{4}$ финала, 2 матча — в $\frac{1}{2}$ финала, финальный матч и матч за третье место. Всего в этой части чемпионата проведено 8 + 4 + 2 + 2 = 16 матчей. Следовательно, во всех группах проведено 96 – 16 = 80 матчей.

Так как в $\frac{1}{8}$ финала было 8 игр, то всего было 8 групп, количество матчей в одной группе равно 80:8 = 10.

Так как в каждой группе каждая команда играет с каждой по одному матчу, то по 10 матчей в группе могли провести 5 команд: $\frac{5\cdot 4}{2}=10$. Следовательно, в чемпионате по футболу участвовало 8·5 = 40 команд.

Ответ. Б. 40 команд.

9. Когда-то в школах во всех классах, начиная с пятого, проводились экзамены. Из 27 билетов по математике семиклассник Стёпа мог ответить лишь на те, номера которых были кратны 5. Когда десятым по счёту он брал билет, то билет №1 и все билеты с 20-го по 27-й уже взяты. Сравните вероятность p1 того, что Стёпа вытащит билет, на который он может ответить, с вероятностью p2 того, чтобы он вытащил бы такой билет, если бы брал билет первым?

А. $p_1 < p_2$.	**Б.** $p_1 = p_2$.	**В.** $p_1 > p_2$.	**Г.** Сравнить невозможно.

□ Так как Стёпа брал билет 10-м, то осталось всего 27 – 9 = 18 билетов. Из них он мог ответить на билеты с номерами 5, 10, 15, то есть на 3 билета. Поэтому $p_1 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

Если бы Стёпа брал билет первым, то из 27 билетов он мог бы ответить на билеты с номерами 5, 10, 15, 20, 25, то есть на 5 билетов. Поэтому $p_2 = \frac{5}{27}$.

Так как $\frac{1}{6} < \frac{5}{27}$, то $p_1 < p_2$.

Ответ. А. $p_1 < p_2$.

10. Какие из следующих утверждений одновременно истинны или ложны?

1) Для каждого учащегося 8-А класса найдётся учащийся 8-Б класса, ниже его ростом.

2) Каждый учащийся 8-Б класса ниже ростом самого низкого учащегося 8-А класса.

3) Самый низкий учащийся 8-Б класса ниже самого низкого учащегося 8-А класса.

4) Средний рост учеников 8-А класса больше среднего роста учащихся 8-Б класса.

А. 1) и 2).	**Б.** 1) и 3).	**В.** 2) и 3).	**Г.** 2) и 4).

□ Обозначим в порядке неубывания рост каждого учащегося 8-А класса через x_1, x_2, …, x_n: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, а рост каждого учащегося 8-Б класса в порядке неубывания — через y_1, y_2, …, y_k: $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_k$, где n и k — количества учащихся в этих классах.

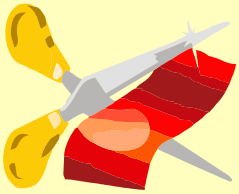
Тогда из утверждения 1) следует, что $y_1 < x_1$, то есть утверждение 3). Следовательно, если истинно утверждение 1), то истинно и утверждение 3). И наоборот, если $y_1 < x_1$, то для i, $1 < i \le n$, $y_1 < x_i$, то есть для любого учащегося 8-А класса найдётся учащийся 8-Б класса, который ниже его.

Из утверждения 3) не следует утверждение 2), так как, если $y_1 < x_1$, то не обязательно, что $y_i < x_1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому утверждение 2) не может быть истинным или ложным одновременно ни с утверждением 3), ни с утверждением 1).

Из утверждения 4) не следует ни одно из утверждений 1), 2), 3), так как соотношения между средними двух групп чисел не следуют те же соотношения между представителями этих групп. Например, из неравенства $\frac{1+2+7}{3} < \frac{4+5}{2}$ не следует, что $7 < 5$ или из неравенства $\frac{4,5+5}{2} < \frac{4+5+6}{3}$ не следует, что $4,5 < 5$.

Ответ. Б. 1) и 3).

11. Площадь прямоугольного листа фанеры размерами 50 см × 40 см уменьшили на 800 см^2, отрезав полоски одинаковой ширины с двух смежных сторон. Какова ширина полоски?



А. 15 см.	**Б.** 14 см.	**В.** 12 см.	**Г.** 10 см.

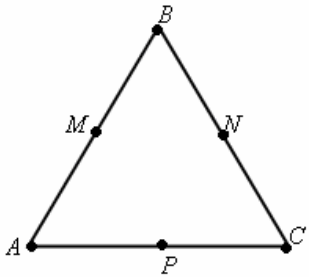
□ Обозначим искомую ширину полоски через x см. Так как площадь оставшейся части листа равна $50 \cdot 40 - 800 = 1200$ см^2, то имеем уравнение: $(50 - x)(40 - x) = 1200$ или $x^2 - 90x + 800 = 0$. его корни 10 и 80. Условию задачи удовлетворяет только первый корень. Следовательно, ширина полоски равна 10 см.

Ответ. Г. 10 см.

12. Клумба имеет форму равностороннего треугольника. Её периметр равен 6 м. Какое наибольшее количество роз можно на ней посадить так, чтобы расстояние между кустами было не менее 1 м?

А. 3.	**Б.** 4.	**В.** 6.	**Г.** 7.

□ Изобразим клумбу равносторонним треугольником ABC, M, N, P — середины его сторон. По условию, длины сторон треугольника ABC равны 2 м. По построению, $AM = MB = BN = NC = CP = PA = 1$ м. По свойству средней линии треугольника, $MN = NP = PM = 1$ м.



Следовательно, если разместить 6 роз в вершинах треугольника и в серединах его сторон, то расстояние между ними будет равно 1 м. Так как расстояние от любой точки равностороннего треугольника, отличной от вершины, до любой его вершины меньше длины стороны треугольника, то седьмую розу нельзя посадить так, чтобы она удовлетворяла условиям задания.

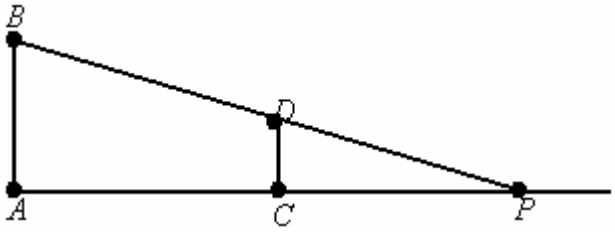
То, что рассмотренный способ «рассадки роз» оптимальный, следует из того, что при любой «рассадке роз», удовлетворяющей условию, розы можно пересадить так, что сначала розы будут посажены в вершинах клумбы, а затем — в серединах её сторон.

Ответ. В. 6.

13. Теннисный мяч подан с высоты 2 м 10 см и пролетел над самой сеткой, высота которой 90 см. На каком примерно расстоянии от сетки мяч ударится о землю, если он подан от черты, находящейся от сетки на расстоянии 12 м и летит практически прямолинейно?

А. 6 м.	**Б.** 9 м.	**В.** 10 м.	**Г.** 12 м.

□ На рисунке схематично изображено условие задачи. Длина отрезка CD равна высоте сетки, мяч подан из точки B и ударился о землю в точке P. Из условия следует, что $CD = 0{,}9$ м, $AB = 2{,}1$ м, $AC = 12$ м.



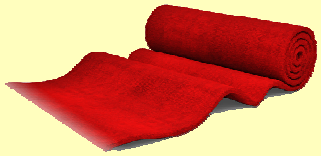
Обозначим через x искомое расстояние, равное длине отрезка CP. Из подобия прямоугольных треугольников ABP и CDP следует равенство

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AP}{CP} \text{ или } \frac{2{,}1}{0{,}9} = \frac{12+x}{x}, \text{ или } 1{,}2x = 0{,}9\cdot 12,\ x = 9.$$

Мяч ударится о землю примерно на расстоянии 9 м от сетки.

Ответ. Б. 9 м.

14. В противоположных углах квадратной комнаты положили два одинаковых прямоугольных ковра, каждый из которых двумя своими сторонами примыкает к стенам. Площадь их общей части оказалась равной 35 м^2. Затем один из ковров развернули в своём углу на 90°. Площадь общей части стала равной 10 м^2. На сколько метров длина ковра больше его ширины?



А. На 3 м.	**Б.** На 4 м.	**В.** На 5 м.	**Г.** На 7 м.

□ Пусть a — длина комнаты, а m и n — длина и ширина ковра. На рис. 1 и рис. 2 изображены возможные расположения ковров. Пусть на рис. 1 общая часть ковров имеет площадь 10 м^2, а на рис.2 — 35 м^2. Тогда справедливо равенство: $2mn - 10 + 2(a-m)(a-n) = 2mn - 35 + (a-m)^2 + (a-n)^2$ или $(a-m-a+n)^2 = 25$, $m - n = 5$. Нетрудно убедиться, что случай, когда на рис 1 общая часть равна 35 м^2 невозможен.

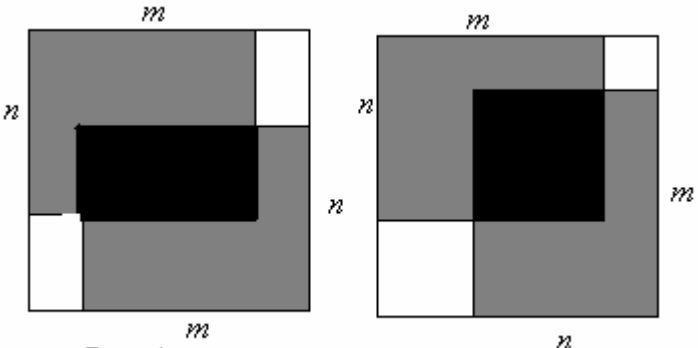
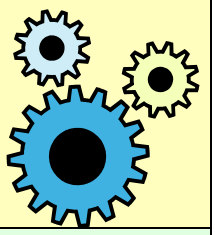


Рис. 1 Рис. 2

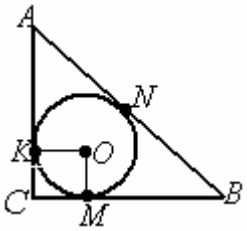
Ответ. В. На 5 м.

15. Металлическая пластина имеет форму треугольника со сторонами 3 см, 4 см и 5 см. Чему равен наибольший диаметр круглой шайбы, которую можно отштамповать из такой пластины?



А. 4 см.	**Б.** 3 см.	**В.** 2,5 см.	**Г.** 2 см.

□ Так как $3^2 + 4^2 = 5^2$, то пластина имеет форму прямоугольного треугольника. Круглая шайба наибольшего диаметра, которую можно отштамповать из пластины, имеющего форму прямоугольного треугольника, моделируется кругом, вписанным в прямоугольный треугольник, моделирующий пластину.



Докажем, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей. Пусть точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC, $\angle C = 90°$, стороны этого треугольника касаются окружности в точках K, M, N (см. рис.). Тогда, по свойству касательных, $AK = AN$, $CK = CM$, $BM = BN$. Легко доказать, что четырёхугольник $KCMO$ является квадратом (его противоположные стороны попарно параллельны, смежные стороны перпендикулярны и равны друг другу). Поэтому $AC + BC = AK + KC + CM + MB = AN + 2r + BN = 2r + AB$, где r — радиус вписанной окружности. Но гипотенуза AB является диаметром окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения следует, что диаметр вписанной окружности равен разности суммы катетов и гипотенузы. Из условия следует, что сумма катетов равна 7 см, а гипотенуза — 5 см. Следовательно, искомый диаметр равен 7 см – 5 см = 2 см.

Ответ. Г. 2 см.

Блок 2

1. Два брата в возрасте 15 и 17 лет получили в наследство некоторую сумму денег. По завещанию, эти деньги были разделены в отношении 3:4, положены в банк и выданы по достижению 18 лет каждому из братьев. Под какой годовой процент положены эти деньги в банк, если братья получили примерно одинаковые суммы?

□ Обозначим через a зедов (зед — условная денежная единица) сумму завещанных денег. Тогда младший получил $\frac{3}{7}a$ зедов, а старший — $\frac{4}{7}a$ зедов.

Пусть p — процент, который банк начисляет ежегодно. Тогда старший брат через год получил $\frac{4}{7}a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ зедов, а младший брат в 18 лет получил $\frac{3}{7}a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ зедов. Имеем уравнение

$\frac{4}{7}a\left(1+\frac{p}{100}\right) = \frac{3}{7}a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$ или $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{4}{3}$. Тогда $1+\frac{p}{100} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ или $p = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot 100 \approx 15{,}5$.

Ответ. 15,5%.

2. В спортивном лагере 23 спортсмена участвовали в соревнованиях по прыжкам в высоту. Для преодоления каждой заказываемой высоты спортсмену разрешается использовать 3 попытки. После окончания соревнований выяснилось, что спортсмены использовали 10 или 11, или 12, или 13 попыток, всего 253 попытки. Сколько человек использовали 12 попыток, если их в полтора раза больше тех, кто использовал 13 попыток?

□ Обозначим через x, y, z количества спортсменов, использовавших 10, 11, 13 попыток соответственно, тогда количество спортсменов, использовавших 12 попыток, равно $1{,}5z$. Имеем два уравнения: $10x + 11y + 31z = 253$, $x + y + 2{,}5z = 23$. Из первого уравнения вычтем второе, умноженное на 10. Получим: $y + 6z = 23$. Отсюда $x + y + 2{,}5z = y + 6z$ или $x = 3{,}5z$. Следовательно, z – чётное число. Если $z = 2$, то $x = 7$, $y = 11$, $1{,}5z = 3$. Сумма этих значений равна 23. Других значений z принимать не может, так как $6z < y + 6z = 23$.

Ответ. 3.

3. По статистике в городе N было в течение года n_1 дней, в которых произошло хотя бы одно дорожно-транспортное происшествие; n_2 дней, в которых произошло, по крайней мере, два дорожно-транспортных происшествия; и т д.; n_9 дней, в которых произошло, по крайней мере, девять дорожно-транспортных происшествия; n_{10} дней, в которых произошло 10 дорожно-транспортных происшествий. Ни в один день не происходило более 10 происшествий. Сколько дорожно-транспортных происшествий произошло в городе N за год?

□ Ровно одно происшествие случилось в $n_1 - n_2$ дней.

Ровно два происшествия случились в $n_2 - n_3$ дней.

И т. д.

Ровно 9 происшествий случились в $n_9 - n_{10}$ дней.

Ровно 10 происшествий случились в n_{10} дней. Следовательно, количество происшествий в городе N в течение года равно

$(n_1 - n_2) + 2\cdot(n_2 - n_3) + \ldots + 9\cdot(n_9 - n_{10}) + 10\cdot n_{10} = n_1 + n_2 + \ldots + n_{10}$.

Ответ. $n_1 + n_2 + \ldots + n_{10}$.

4. В классе 20 человек. Известно, что среди любых четырёх из них хотя бы двое дружат. Обязательно ли в этом классе есть ученик, у которого не менее 5 друзей?

 Предположим, что у каждого из учащихся не более 4-х друзей. Возьмём любого учащегося и выберем 4-х учеников, среди которых все — друзья выбранного. Из оставшихся 15 учащихся выберем любого и 4-х учеников, среди которых все — друзья выбранного.

Для оставшихся 10 учеников описанную процедуру проделаем ещё дважды. В результате будут выбраны 4 ученика. По условию, по крайней мере, двое из них дружат. Но это противоречит тому, что все друзья этих учеников были ранее отобраны. Следовательно, обязательно в этом классе есть ученик, у которого не менее 5 друзей.

Ответ. Обязательно.

5. В некоторой компании у каждых трёх человек имеется ровно один общий знакомый среди членов этой компании. Сколько человек может насчитывать такая компания?

 Пусть в компании n человек. Ясно, что $n \geq 3$ (иначе просто нет ни одной тройки), и что $n \neq 3$ (в противном случае у трех человек, составляющих компанию, нет общего знакомого). Выберем произвольного члена компании, скажем A, и рассмотрим всевозможные тройки с его участием. У каждой такой тройки есть общий знакомый. Докажем, что у различных троек общие знакомые различны. Пусть, от противного B – общий знакомый троек A, C_1, C_2 и A, D_1,D_2. Пары C_1, C_2 и D_1, D_2 различны, поэтому из C_1, C_2, D_1, D_2 можно выбрать тройку. Но тогда у нее будет два общих знакомых — A и B – противоречие.

Общее количество рассматриваемых троек – $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ и по доказанному оно не больше числа членов компании, отличных от А. Имеем: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \leq n-1$, откуда $n \leq 4$. Случай $n = 4$ возможен: в компании 4 человека и все знают друг друга.

Ответ. 4.

6. В некотором банке имеется автомат, разменивающий любую банкноту на 4 банкноты (или 4 монеты) меньшего достоинства. Можно ли в этом автомате разменять банкноту достоинством в 5000 руб. на сторублёвые банкноты?

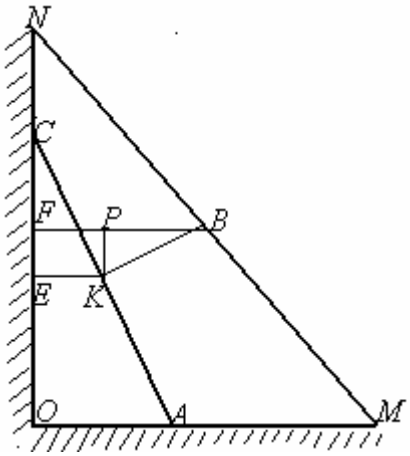
 Каждый размен увеличивает количество банкнот (или банкнот и монет) на 3. По условию, из банкноты в 5000 руб. нужно получить 50 сторублёвых банкнот, то

есть увеличить количество банкнот на 50 – 1 = 49. Так как число 49 на 3 не делится, то указанный размен невозможен.

Ответ. Нет.

7. К стене дома приставлена большая лестница. Под ней поставили к стене маленькую лестницу так, что концы лестниц на земле на расстоянии 2 м друг от друга, а верхние концы на стене — на расстоянии 1 м. Чему примерно с точностью до 1 дм равно расстояние от кошки, сидящей посередине маленькой лестницы, до воробья, севшего на середину большой лестницы?

□ На рисунке схематично изображено условие задачи: отрезки MN, AC моделируют лестницы, точки K и B — их середины. Пусть BF, KE — средние линии треугольников OMN и OAC. Тогда $BF = \frac{1}{2}OM$, $KE = \frac{1}{2}OA$. Так как по построению $PF = KE$, то $BP = BF - PF = BF - KE = \frac{1}{2}OM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}AM - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}AM = 1$.



Аналогично находим: $KP = \frac{1}{2}CN = \frac{1}{2}$.

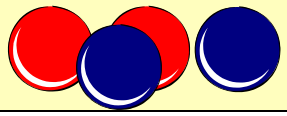
Следовательно, $BK = \sqrt{BP^2 + PK^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1$ м. Искомое расстояние равно примерно 1,1 м.

Ответ. ≈ 1,1 м.

8. В центре квадратного бильярдного стола, лузы которого находятся только в его углах, лежит шар. Можно ли так кием направить шар, чтобы, отразившись от одного борта (угол падения равен углу отражения), шар попал в какую-нибудь лузу:

1) сразу;

2) отразившись от противоположного борта?



□ 1) На рис. 1 ломаная OMC является изображением искомой траектории шара. По построению, $MB = DN = AK = KM = \frac{1}{3}AB$. Так как $KN = BC$, то центр квадрата $ABCD$ является серединой отрезка NM. Прямоугольные треугольники NKM и CBM равны, следовательно, $\angle KMN = \angle BMC$. Поэтому шар выпущен из центра стола в точку, делящую сторону стола в отношении 2:1.

2) На рис. 2 ломаная $OMKB$ является изображением искомой траектории шара.

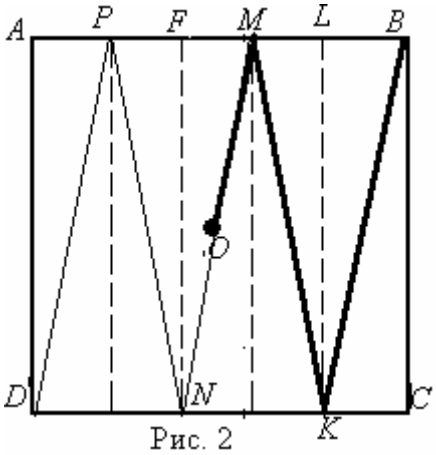


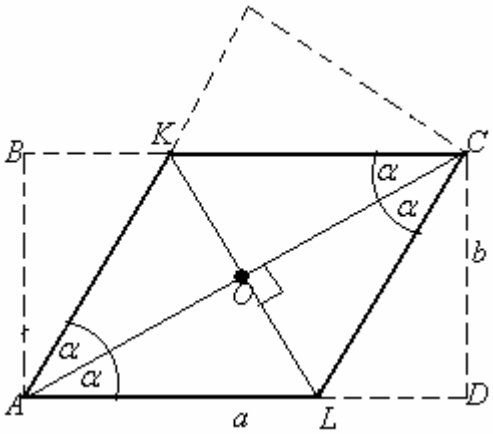
Рис. 2

По построению, $PM = MB = DN = NK = \frac{2}{5}AB$, $KC = AP = \frac{1}{5}AB$. Следовательно, центр квадрата $ABCD$ является серединой отрезка NM. Прямоугольные треугольники BKL, MKL, BKC и FMN равны, следовательно, $\angle FMN = \angle BMK = \angle MKN = \angle BKC$. Поэтому шар выпущен из центра стола в точку, делящую сторону стола в отношении 2:3.

Ответ. а) Можно; б) можно.

9. Прямоугольный лист бумаги длиной a см и шириной b см сложили по диагонали Части, выходящие за границы двух слоёв бумаги, отрезали и развернули лист. Верно ли, что площадь полученного листа больше половины площади исходного листа?

Если прямоугольник $ABCD$ сложить по диагонали AC, а затем отрезать треугольники, выходящие за границы двух слоёв, то получим четырёхугольник $AKCL$ (см. рис.). Этот четырёхугольник является ромбом. Действительно, $AK = AL$, $KC = CL$ и $\angle LCO = \angle KCO = \angle LAO = \angle KAO$ по построению. Следовательно, равнобедренные треугольники AKL и CKL равны, а поэтому $AKCL$ — параллелограмм с равными сторонами.



Найдём диагонали ромба $AKCL$:

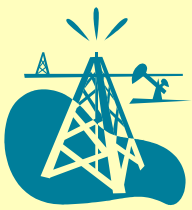
$$AC = \sqrt{a^2 + b^2},\ Kl = 2OK = 2OCtg\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{b}{a}.$$

Следовательно, $S_{AKCL} = \frac{1}{2}KL \cdot AC = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)\frac{b}{a} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a}$.

Так как площадь прямоугольника равна ab, то площадь полученного листа всегда больше половины площади исходного листа.

Ответ. Да.

10. В центре участка, имеющего форму круга радиуса 20 км, находится радиопередатчик. На границе этого участка расположены глушители. Передатчик слышен только в тех точках участка, которые удалены от передатчика не дальше, чем от каждого глушителя. Достаточно ли расположить на границе участка три глушителя, чтобы нельзя было услышать передатчик на площади, большей половины площади участка?



Предположим, что на границе участка расположены три глушителя на одинаковом расстоянии друг от друга. На рис. 1 схематически изображено

расположение передатчика в центре круга P радиуса 20 км и глушителей в точках A_1, A_2, A_3, являющихся вершинами равностороннего треугольника.

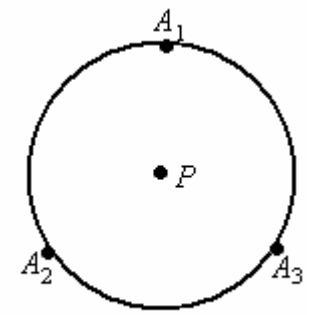


Рис. 1

Проведём серединный перпендикуляр B_2B_1 к отрезку A_1P (рис. 2). Так как в четырёхугольнике $A_1B_1PB_2$ диагонали перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, то он является ромбом. Следовательно, $A_1B_2 = A_1B_1 = A_1P$. Так как $\angle A_1PA_2 = 120°$, $\angle A_1PB_2 = 60°$, то B_2 — середина дуги A_1A_2. Аналогично устанавливается, что B_1 — середина дуги A_1A_3.

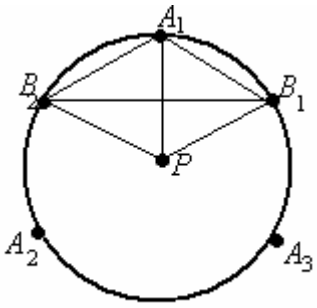


Рис. 2

Из доказанного следует, что треугольники PA_2B_2 и PA_3B_1 — равносторонние. Следовательно, перпендикуляры, проведенные из точек B_1 и B_2 соответственно к отрезкам PA_3 и PA_2, являются серединными перпендикулярами (рис. 3).

Из условия следует, что радиопередатчик может быть услышан только в точках равностороннего треугольника $B_1B_2B_3$. Найдём его сторону. $B_1B_2 = 2\ B_2K = 2\sqrt{PB_2^2 - \left(\frac{A_1P}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{4}B_2P^2} = \sqrt{3}B_2P$.

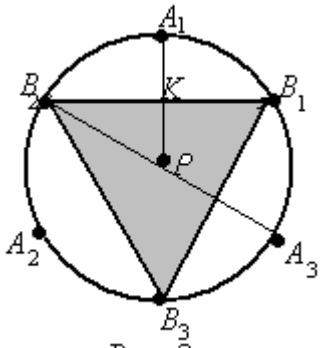


Рис. 3

Найдём площадь S треугольника $B_1B_2B_3$. $S = \frac{1}{2}B_2P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}B_2P = \frac{3\sqrt{3}}{4}B_2P^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 400 = 300\sqrt{3}$ м^2. Так как площадь круга равна 400π и $300\sqrt{3} < 200\pi$, то площадь треугольника $B_1B_2B_3$ меньше половины площади участка.

Ответ. Да.